Modul Pembelajaran Berbasis Kemampuan Berpikir Kreatif dan GeoGebra

Created by: Ayu Faradillah dan Windia Hadi

2019

DAFTAR ISI

PROLOG

Kemampuan Berpikir Kreatif Matematis

Kemampuan berpikir kreatif matematis mengacu pada pengetahuan kemampuan berpikir kreatif secara general. Creative thinking ability in mathematics is an important component that should be possessed by students dealing with their sensitiveness to mathematical problems, therefore, they will be able to consider new information and ideas that enable them to make relations with open mind in solving mathematical problems and daily problems encountered (Azhari, 2013; Cahyaningros, Sukestiyarno & Sugianto, 2013; Puspitasari, In'am, Syaifuddin, 2019). Sama halnya dengan Siswono (2006) menyatakan bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah mengembangkan aktivitas kreatif yang melibatkan imajinasi, intuisi dan penemuan dengan mengembangkan pemikiran divergen, orisinal, rasa ingin tahu, membuat prediksi dan dugaan mencoba-coba.

Sedangkan Maharani (2014) didalam penelitiannya *Creative Thinking in Mathematics: Are we able to solve Mathematical Problems in A Variety of Way?* menyimpulkan bahwa ada empat kompetensi dalam menilai kemampuan berpikir kreatif yaitu.

1. *fluency,* kemampuan dalam menyelesaikan dan memberikan banyak solusi terhadap persoalan yang dihadapi atau kemampuan memberikan banyak contoh atau pernyataan yang terkait situasi matematis,
2. *flexibility,* kemampuan dalam menggunakan berbagai macam strategi dalam pemecahan masalah,
3. *originality,* penggunaan strategi baru, unik, atau tidak biasa dalam menyelesaikan permasalahan, dan
4. *elaboration,* kemampuan dalam memberikan penjelasan secara detail.

BAB 1

Model Matematika

Sejarah Program Linier

Program linier tidak berkaitan secara langsung dengan program computer. Program linier dapat digunakan untuk memecahkan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Program linier telah dikembangkan selama Perang Dunia II. Ide program linier pertama kali dicetuskan oleh seorang ahli matematika yang berasal dari Rusia bernama L.V. Kantorivich. Ia juga menuliskan sebuah buku yang berjudul "*Mathematical Methods In The Organization And Planning Of Production*". Dalam bukunya, ia mengungkapkan tentang persoalan program linier pertama kali. Akan tetapi, cara pemecahan masalah pada program linier tidak berkembang dengan baik di Rusia. Sehingga, pada tahun 1947, program linier dikembangkan lebih dalam oleh George B. Dantzig. Pengertian kata program merupakan persamaan untuk model perencanaan sedangkan linier merupakan seluruh fungsi persamaan atau pertidaksamaan matematis yang disajikan dari permasalahan yang bersifat linier. Dengan demikian program linier merupakan proses penyusuan program linier yang solusinya menjadi dasar bagi pengambilan keputusan terhadap problem riil yang dimodelkan atau diprogramlinierkan (Rafflesia dan Widodo, 2014:1).

Asumsi-Asumsi Pada Program Linier

Sebelum mempelajari tentang cara menyelesaikan program linier, terdapat beberapa asumsi yang berkaitan dengan masalah pada program linier (Lewis, 2008: 5). Beberapa asumsi tersebut adalah.

1. *Proportionality*

   Yaitu adanya proporsionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala. Pada asumsi ini berarti naik turunnya fungsi tujuan dan kendala atau fasilitas yang tersedia akan berubah secara proporsional dengan perubahan tingkat kegiatan. Fungsi tujuan adalah fungsi linier yang hendak dicari nilai optimumnya dan berbentuk sebuah persamaan. Sedangkan, fungsi kendala adalah fungsi-fungsi linier yang harus terpenuhi dalam optimasi fungsi tujuan tadi dan dapat berbentuk persamaan atau pertidaksamaan (Kurniasih, 2018:2).

2. *Additivity*

Yaitu nilai tujuan pada tiap kegiatan tidak saling mempengaruhi atau dalam program inier dianggap bahwa kenaikan dari nilai tujuan atau fungsi tujuan (Z) yang diakibatkan oleh kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi bagian nilai Z yang diperoleh dari kegiatan lain.

3. *Divisibility*

Yaitu keluaran atau output yang dihasilkan pada tiap kegiatan dapat berupa bilangan pecahan. Asumsi ini menjamin bahwa keuntungan atau total biaya merupakan hasil dari penjumlahan biaya atau keuntungan individual sedangkan total kontribusi terhadap pembatasan ke-i adalah jumlah kontribusi individual dari kegiatan individual.

4. *Certainty*

Pada asumsi ini, semua konstanta (parameter) diasumsikan mempunyai nilai yang pasti. Bila nilai-nilai parameternya bernilai probabilistic, maka harus digunakan formulasi pemograman masalah stokastik.

Formulasi Model Program Linier

Dalam menyelesaikan masalah program linier, terdapat langkah-langkah memformulasikan model program linier. Langkah-langkah tersebut mencakup identifikasi hal-hal yang berkaitan dengan tujuan dan batasan tujuan tersebut (Rafflesia dan Widodo, 2014:2-4). Beberapa unsur yang digunakan dalam menyusun program linier sebagai berikut.

1. Variabel keputusan

Adalah variabel yang dapat menentukan keputusan-keputusan yang akan dibuat dalam pencapaian solusi optimal. Kesalahan dalam menentukan variabel keputusan akan menyebabkan pencapaian solusi tidak optimal. Oleh karena itu, perlu pemahaman tentang karakteristik masalah riil yang model program liniernya akan disusun.

2. Fungsi tujuan

Merupakan fungsi yang menggambarkan tujuan atau sasaran dalam permasalahan program linier yang berkaitan dengan pemanfaatan sumber daya secara optimal untuk memperoleh keuntungan maksimal atau untuk penggunaan biaya minimum.

3. Fungsi kendala/pembatas

Merupakan bentuk rumusan terhadap kendala yang dihadapi dalam mencapai tujuan. Kendala tersebut biasanya terkait keterbatasan sumber daya yang dimiliki di dalam mencapai tujuan yang telah dirumuskan. Dengan ketersediaan sumber daya yang terbatas, perusahaan diarahkan untuk mencapai tujuan dengan memaksimumkan keuntungan yang diperoleh atau meminimumkan biaya yang digunakan tanpa harus menambah biaya produksi.

4. Batasan variabel

   Batasan variabel menggambarkan tentang wilayah variabel. Jumlah sumber daya yang tersedia untuk persoalan ini tidak boleh bernilai negatif.

   $X_{a,b} \geq 0$; dimana a = 1,2,...,m dan b = 1,2,..., n

Bentuk Umum Program Linier

Secara umum bentuk program linier dapat dituliskan sebagai berikut.

1. Fungsi tujuan (*objective function*)

   Maksimum/Minimum Z = $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

2. Fungsi pembatas (*constraint function*)

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n & \leq atau \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n & \leq atau \geq b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n & \leq atau \geq b_m
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_j \geq 0$$

Keterangan:

m = banyaknya jenis sumber yang terbatas atau fasilitas yang tersedia.

n = banyaknya kegiatan-kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas terbatas tersebut.

x_j = variabel keputusan untuk kegiatan ke-j (j = 1, 2, ..., n)

a_n/a_m = banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran (output) kegiatan j (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n).

bm = banyaknya sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan (i = 1, 2, ..., m).

cn = kenaikan nilai f apabila pertambahan tingkat kegiatan dengan satu satuan (unit) atau merupakan sumbangan setiap satuan keseluruhan kegiatan terhadap nilai f.

Z = nilai yang dioptimalkan (maksimum atau minimum).

Catatan Tambahan

Contoh

1. Shahia Furniture akan membuat meja dan bangku. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp 150.000,- sedangkan satu unit bangku adalah Rp 80.000,-. Jika untuk membuat satu unit meja memerlukan waktu 4 jam kerja sedangkan satu unit bangku memerlukan waktu 3 jam kerja. Dan untuk pengecatan satu unit meja memerlukan waktu 2 jam kerja sedangkan bangku 1 jam kerja. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan bangku adalah 240 jam per minggu sedangkan jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 100 jam per minggu. Formulasikan atau buatlah model matematikanya!

Penyelesaian.

1. Cara Pertama (Menggunakan Penjabaran)

Misalkan:

a = jumlah meja (unit) yang akan diproduksi.

b = jumlah bangku (unit) yang akan diproduksi.

Fungsi Tujuan:

$Z = 150.000\ a + 80.000\ b$

Fungsi Kendala:

Waktu pembuatan: $4a + 3b \leq 240$

Waktu pengecatan: $2a + b \leq 100$

Syarat non-negatif: $a \geq 0, b \geq 0$

2. Cara kedua (Menggunakan Tabel)

Misalkan: Misalkan:

a = jumlah meja (unit) yang akan diproduksi.

b = jumlah bangku (unit) yang akan diproduksi.

	Waktu Pembuatan	Waktu Pengecatan	Keuntungan per unit
Meja	4	2	150.000
Bangku	3	1	80.000
Jumlah	240	100	

$Z = 150.000\,a + 80.000\,b$

$4a + 3b \leq 240$

$2a + b \leq 100$

$a \geq 0, b \geq 0$

2. Sebuah area parkir dengan luas 3.750 m^2, maksimal hanya dapat ditempati 300 kendaraan yang terdiri dari sedan dan bus. Jika luas parkir untuk sedan x m^2 dan bus y m^2 (dimana x adalah bilangan genap positif kurang dari 7 dan y adalah bilangan ganjil positif antara 10-20) Buatlah beberapa kemungkinan model matematikanya!

Penyelesaian:

- Model Matematika pertama:

Misal:

...

...

Fungsi Tujuan:

Z = ...

Fungsi Kendala:

...

...

...

- Model Matematika kedua:

Misal:

...

...

Fungsi Tujuan:

Z = ...

Fungsi Kendala:

...

...

...

Latihan Soal

1. Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari kedua produk tersebut masing-masing adalah Rp 15.000,- dan Rp 25.000,- per unit. Berdasarkan survey menunjukkan bahwa produk I harus dibuat sekurang-kurangnya 5 unit sedangkan produk II sekurang-kurangnya 3 unit. Melihat bahan baku yang tersedia makan kedua produk tersebut dapat dibuat paling sedikit 10 unit. Formulasikan permasalah di atas menjadi model matematika! Gunakanlah dua cara dalam memformulasikannya!.

   Penyelesaian:

   Cara Pertama

   Cara Kedua

2. Seorang manajer suatu perusahaan penghasil kerajinan tangan mempekerjakan pengrajin untuk membuat piring dan gelas desain Bali. Sumber daya yang diperlukan adalah tanah liat dan pekerja. Manajer ingin memperoleh keuntungan Rp 1000,- untuk piring per unit dan Rp 500,- gelas per unit. Sedangkan untuk membuat satu unit piring memerlukan waktu 1 jam kerja dan satu unit gelas 2 jam kerja. Sementara itu, tanah liat

yang dibutuhkan untuk membuat piring adalah x satuan per unit dan gelas y satuan per unit (jika x adalah bilangan bulat antara 2-5 dan y adalah bilangan ganjil positif kurang dari 7). Lamanya pekerja bekerja adalah 40 jam per hari dan jumlah tanah liat yang tersedia adalah 120 satuan. Buatlah beberapa model matematika dari permasalahan di atas! (Minimal 2).

Penyelesaian:

Model Matematika Pertama

Model Matematika Kedua

3. Sebuah pabrik obat menyediakan 2 jenis campuran A dan B. Bahan-bahan dasar yang terkandung dalam tiap kg campuran A dan B adalah sebagai berikut.

	Bahan Dasar	
	Bahan-1	Bahan-2
Campuran A	0.4 kg	0.6 kg
Campuran B	0.8 kg	0.2 kg

Dari campuran A dan B hendak dibuat campuran C. Campuran C ini sekurang-kurangnya mengandung bahan-1 sebanyak 4 kg dan bahan-2 sebanyak 3 kg. Harga tiap kg campuran A adalah Rp 20.000,- dan tiap kg campuran bahan B adalah Rp 10.000,-. Buatlah model matematikanya dengan cara Anda sendiri!

Penyelesaian:

4. Pabrik ban sepeda memproduksi ban luar dan ban dalam. Ban luar diproses melalui 3 unit mesin, sedangkan ban dalam hanya diproses di dua unit mesin. Setiap ban luar diproses secara berurutan selama 2 menit di mesin I, 8 menit di mesin II dan 10 menit di mesin III. Sedangkan setiap ban dalam diproses selama 5 menit di mesin I dan 4 menit di mesin II. Sumbangan keuntungan dari setiap unit ban luar dan ban dalam masing-

masing Rp 400,- dan Rp 300,-. Kapasitas pengoperasian masing-masing mesin setiap harinya 800 menit. Jika seiap ban yang diproduksi senantiasa laku terjual. Tentukan model matematikanya agar memperoleh keuntungan maksimum! Jelaskan alasan Anda menggunakan penyelesaian tersebut!

Penyelesaian:

BAB 2 Program Linier dengan Metode Grafik

Metode grafik pada program linier terdiri dari dua fase, yaitu (1) menentukan ruang/daerah penyelesaian (solusi) yang *feasible*, dan (2) menentukan solusi optimal dari semua titik di ruang/ daerah *feasible*. Ada dua mengidentifikasi solusi optimum, yaitu metode isoline (garis selidik) dan titik ekstrim.

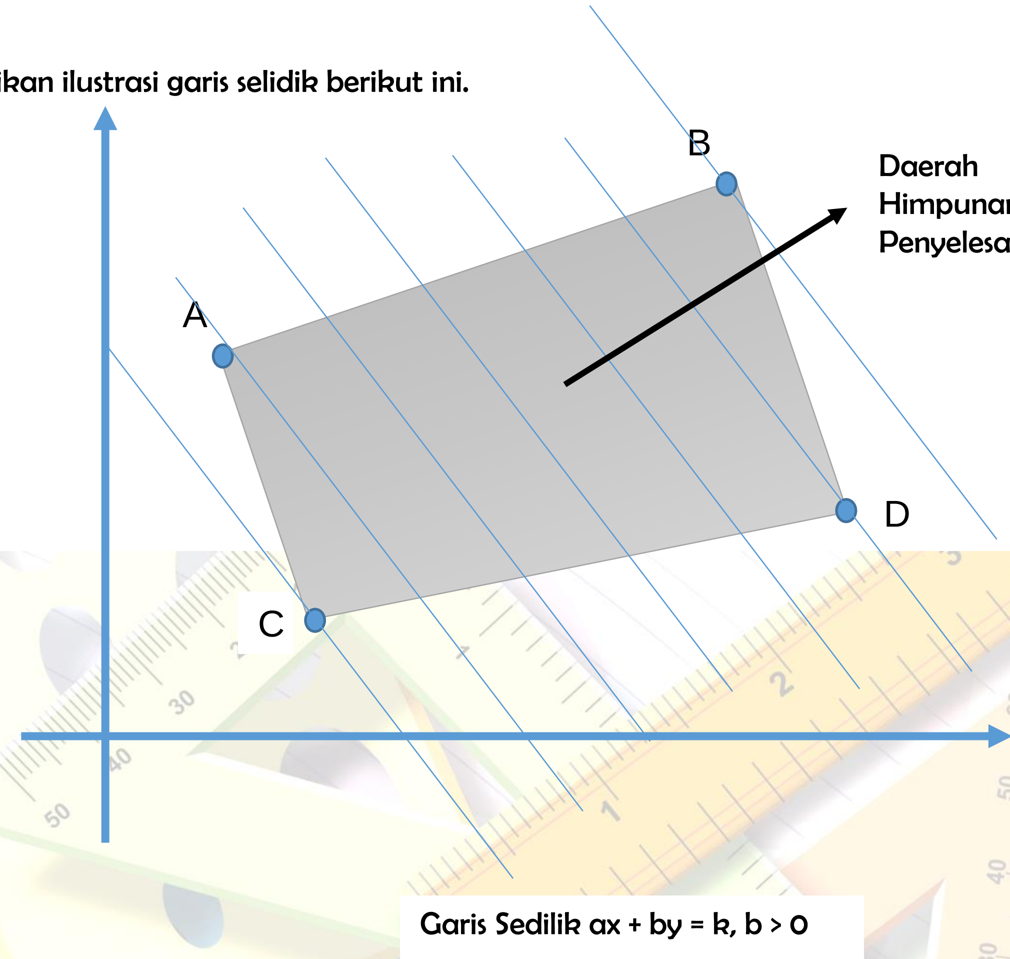
Metode Isoline (Garis Selidik)

Pada dasarnya, metode isoline dilakukan dengan cara menggeser garis selidik secara sejajar ke arah kiri, kanan, atas, atau bawah sampai garis tersebut memotong titik-titik pojok daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier dua variabel. Adapun langkah-langkah penyelesaian masalah program linier dengan metode isoline, sebagai berikut.

1. Buatlah model matematika dari soal atau masalah yang tersedia dimana model matematika tersebut terdiri dari fungsi tujuan dan fungsi kendala.
2. Tentukan grafik dan daerah himpunan penyelesaiannya.
3. Tentukan arah peningkatan atau penurunan dari fungsi tujuan persoalan maksimum atau minimum. Pilihlah dua garis isoline fungsi tujuan di daerah *feasible* dan evaluasi nilai fungsi tujuan pada kedua garis isoline tersebut.
4. Ikuti arah peningkatan atau penurunan sampai mencapai titik batas (sudut) dimana peningkatan atau penurunan dari fungsi tujuan keluar dari daerah *feasible*.
5. Solusi optimum diperoleh dari titik batas dimana peningkatan atau penurunan dari fungsi tujuan akan meninggalkan daerah *feasible.*

Untuk mendapatkan nilai maksimum, geser garis selidik secara sejajar ke arah kanan atau atas sampai memotong titik paling jauh dari daerah himpunan penyelesaian. Titik yang paling jauh tersebut merupakan titik yang memaksimumkan fungsi tujuan. Sedangkan untuk mendapatkan nilai minimum, geser garis selidik secara sejajar ke arah kiri atau bawah sampai memotong titik paling dekat dari daerah himpunan penyelesaian. Titik yang paling dekat tersebut merupakan titik yang meminimumkan fungsi tujuan.

Perhatikan ilustrasi garis selidik berikut ini.



Gambar 2.1 Ilustrasi grafik metode isoline

Metode Titik Ekstrim

Selain menggunakan metode isoline atau garis selidik, dalam menentukan nilai optimum dari pemasalahan program linier dapat menggunakan metode titik ekstrim. Menyelidiki nilai optimum dari fungsi objektif juga dilakukan dengan menentukan titik-titik potong dari garis-garis batas yang ada. Titik-titik potong tersebut merupakan nilai ekstrim yang berpotensi memiliki nilai maksimum di salah satu titiknya. Berdasarkan titik-titik tersebut ditentukan nilai masing-masing fungsinya, kemudian dibandingkan. Nilai terbesar merupakan nilai maksimum dan nilai terkecil merupakan nilai minimum. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah program linier dengan metode titik ekstrim, sebagai berikut.

1. Meggambarkan grafik pertidaksamaan-pertidaksamaan fungsi kendala.
2. Menentukan titik ekstrim
3. Menyelidiki nilai optimum

Contoh.

a. Tentukan nilai maksimum dari:

   Fungsi tujuan : Z = f (x,y) = 3x + 4y

   Fungsi Kendala:

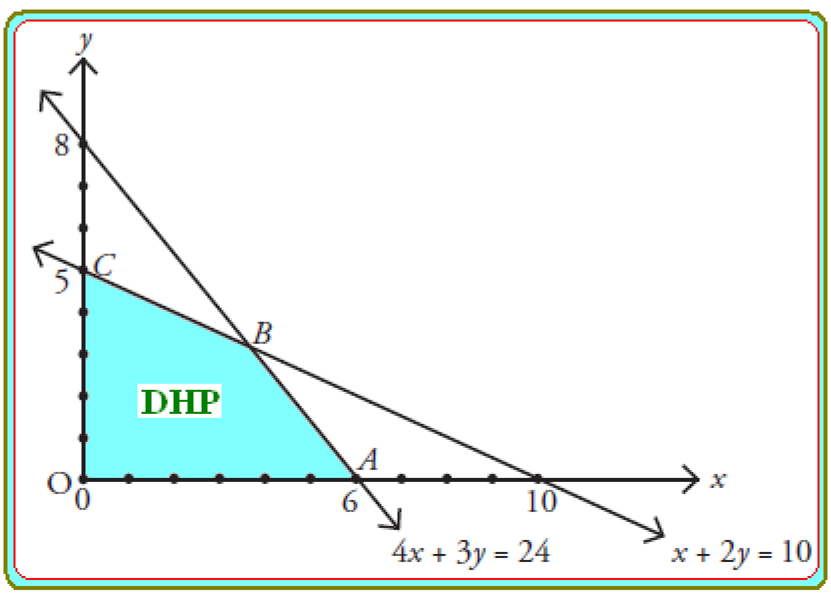
   $x + 2y \leq 10$

   $4x + 3y \leq 24$

   $x \geq 0, y \geq 0$

   (Selesaikan dengan beberapa cara)

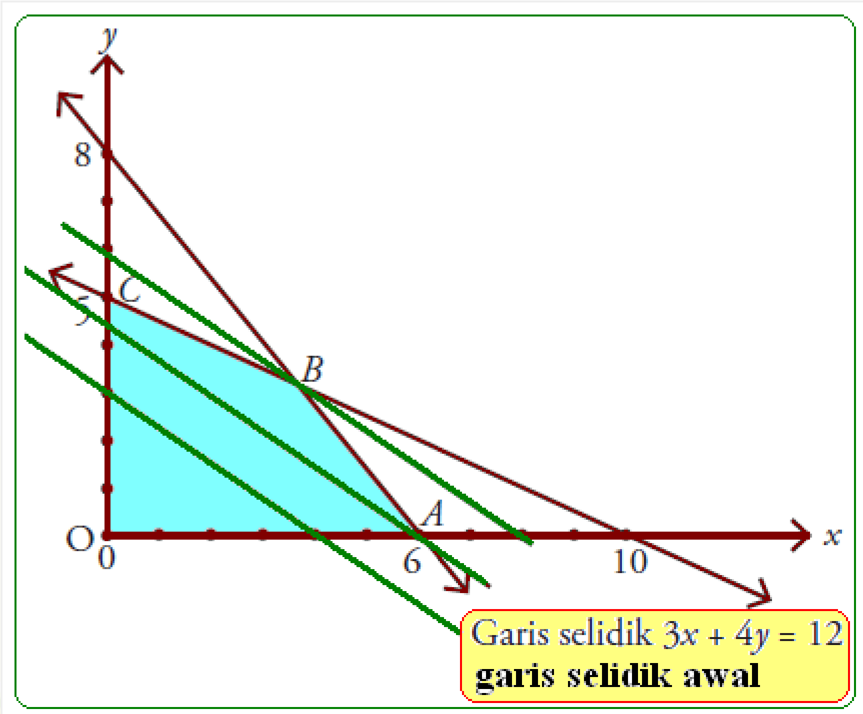
   Penyelesaian.



   Metode Isoline

   Fungsi Tujuan: Z = 3x + 4y

   Bentuk umum garis selidiknya adalah 3x + 4y = k, untuk memudahkan dalam menggambar pilih k = 12 sehingga persamaan garis selidik menjadi 3x + 4y = 12.



Berdasarkan gambar di atas, garis selidik digeser secara sejajar ke kanan atau ke atas, memotong titik terjauh dari himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier dua variabel yang di ketahui yaitu titik B. dimana cara untuk mencari titik B adalah dengan menggunakan eliminasi substitusi kedua pertidaksamaan fungsi kendala di atas.

$x + 2y = 10$

$4x + 3y = 24$

Eliminasi

Substitusi

Metode Titik Ekstrim

Berdasarkan grafik di atas, terdapat 4 titik ekstrim atau titik sudut yaitu titik A, B, C dan D.

Titik	Z = 3x + 4y	Keterangan
O (0,0)		
A (6,0)		
B (..., ...)		
C (0,5)		

Maka dari tabel di atas diketahui bahwa nilai maksimumnya adalah ....

b. Tentukan nilai minimum dari:

Fungsi tujuan : $Z = f(x,y) = 3x + 4y$

Fungsi Kendala:

$x + 2y \leq p$ (p adalah bilangan bulat antara 10 dan 14)

$4x + 3y \leq 24$

$x \geq 0, y \geq 0$

(Berikanlah beberapa jawaban untuk permasalahan tersebut)

Penyelesaian.

Jawaban Pertama

Jawaban Kedua

Jawaban Ketiga

c. Seorang pedagang buah memiliki modal Rp 10.000.000 kemudian membeli apel dan pisang untuk dijual kembali. Harga beli tiap kg apel dan pisang adalah Rp 40.000,- dan Rp 16.000,-. Tapi keranjang yang dimiliki oleh pedagang tersebut hanya muat menampung 400 kg buah. Tentukan jumlah maksimum apel dan pisang yang dapat dibeli! (Gunakan cara Anda sendiri untuk menyelesaikan soal di atas!).

Penyelesaian.

Cara yang digunakan adalah ....

Mengapa Anda menggunakan cara tersebut?

Penyelesaian.

Penyelesaian.

Latihan Soal

1. Bu Ilyas akan mengadakan acara syukuran dan berencana membuat dua macam kue. Kue pertama membutuhkan 30 ons tepung terigu dan 10 ons tepung beras, sedangkan kue kedua akan membutuhkan 10 ons tepung terigu dan 20 ons tepung beras. Jumlah tepung terigu yang tersedia adalah 60 ons dan jumlah tepung beras yang tersedia adalah 40 ons. jika tiap resep kue pertama dapat memenuhi kuota untuk 40 orang dan tiap resep kue kedua dapat memenuhi kuota untuk 10 orang, maka jumlah maksimum orang yang dapat diundang oleh bu Ilyas adalah.... (Selesaikan dengan menggunakan beberapa cara!)

   Penyelesaian.

2. Seorang pasien diharuskan mengkonsumsi dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin , sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. dalam satu hari anak tersebut memerlukan p unit vitamin A dan q unit vitamin B. Jika harga tablet pertama Rp 4.000,- perbutir dan tablet kedua Rp 8.000,- perbutir, maka pengeluaran minimum untuk pembelian tablet perhari adalah... (Carilah beberapa solusi untuk permasalahan di atas! Jika p adalah bilangan genap kurang dari sama dengan 20 dan q adalah bilangan prima kurang dari sama dengan 5)

   Penyelesaian.

3. Luas daerah parkir sebuah minimarket adalah 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung lahan parkir tersebut maksimum hanya 200 kendaraan dengan biaya parkir untuk mobil kecil Rp 2.000,-/jam dan mobil besar Rp 3.000,-/jam. Jika dalam satu jam parkir terisi penuh dan tidak ada yang pergi dan datang. Tentukan pendapatan maksimum tempat parkir tersebut! (Gunakan cara Anda sendiri untuk menyelesaikan permasalahan di atas dan ungkapkan alasannya!)

   Penyelesaian.

Tugas Kelompok!

Carilah atau buatlah 4 soal yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari tentang program linier tiga variabel beserta penyelesaiannya! Hubungkan keempat soal tersebut dengan indikator-indikator kemampuan berpikir matematis!

BAB 3

Analisis Simpleks

Metode simpleks merupakan metode yang bisa digunakan untuk menyelesaikan program linier dengan jumlah variabel keputusan yang sembarang (bila lebih dari 2 atau bahkan ribuan variabel keputusan). Metode simpleks merupakan metode yang sistematis dimulai dari suatu pemecahan dasar yang fisibel ke pemecahan lainnya yang dilakukan berulang-ulang (iterasi) dengan jumlah ulangan yang terbatas, sehingga akhirnya tercapai suatu pemecahaan dasar yang optimum. Metode simplex dimulai dari suatu titi sembarang pada daerah fisibel (ruang solusi) menuju titik ekstri yang optimum. Kurniasih (2015: 24) beberapa istilah yang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah program linier dengan menggunakan metode simpleks, diantaranya.

1. Iterasi

   Adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2. Variabel non basis

   Adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminology umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan
3. Variabel basis

   Adalah variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variable basis merupakan variabel slack (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan ≤) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan ≥ atau =). Secara umum, jumlah variabel selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif)
4. Solusi atau nilai kanan

   Adalah nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
5. Variabel slack

   Variabel slack (kekurangan) disebut juga variabel penolong. Variabel slack adalah variable yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≤ menjadi persamaan (=). Penambahan variabel slack merupakan implikasi dari pengubahan ketidaksamaan menjadi persamaan. Untuk kendala dengan tanda ketidaksamaan ≤ maka ruas kiri dari kendala tersebut perlu ditambahkan variabel slack yang merepresentasikan kekurangan ruas kiri terhadap ruas kanan. Sedangkan kendala dengan tanda ketidaksamaan ≥ maka ruas kiri dari kendala harus dikurangi variabel surplus yang mengindikasikan kelebihan ruas kiri terhadap ruas kanan dan menambah variabel artifisial agar terdapat terdapat sub-matrik identitas di dalam matriks koefisien.

6. Variabel surplus

   Adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≥ menjadi persamaan (=). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai variabel basis.

7. Variabel buatan

   Adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk ≥ atau = untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada. Variabel hanya ada di atas kertas.

8. Kolom pivot (kolom kerja)

   Adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot.

9. Baris pivot (baris kerja)

   Adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.

10. Elemen pivot (elemen kerja)

    Adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar pehitungan untuk tabel simpleks berikutnya.

11. Variabel masuk

    Adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu dari antara variabel non basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.

12. Variabel keluar

    Adalah variabel yang keluar dari variabel basis pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu dari antara variabel basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Langkah-Langkah Metode Simpleks

1. Mengubah fungsi tujuan dan batasan ke dalam fungsi implisit,
2. Menyusun persamaan-persamaan pada tabel,
3. Memilih kolom kunci,
4. Memilih baris kunci,
5. Mengubah nilai-nilai baris kunci,
6. Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci,
7. Melanjutkan perubahan-perubahan sampai optimal, dan
8. Kesimpulan.

Rafflesia dan Widodo (2014: 20-22) algoritma simpleks untuk persoalan maksimisasi, yaitu

1) konversikan formulasi persoalan ke dalam bentuk standar untuk mengubah pembatas bentuk ≤ menjadi =, dengan cara menambahkan variabel slack (s_i) menjadi:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n + s_1 = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n + s_2 = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n + s_m = & b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$$

2) Cari Basic Feasible Solution (BFS)
3) Jika seluruh variabel non basis mempunyai koefisien non negatif (artinya berharga positif atau nol) pada baris fungsi tujuan (baris persamaan f yang biasa juga disebut baris non), maka BFS sudah optimal. Jika pada baris nol masih ada variabel dengan koefisien negatif, pilihlah salah satu variabel yang mempunyai koefisien paling negatif (negatif paling besar) pada baris 0 itu. Variabel ini akan memasuki status variabel basis, oleh karena itu, disebut sebagai variabel yang masuk menjadi variabel basis (*Entering Variable* disingkat EV)

4) Hitung rasio dari ruas kanan : koefisien EV pada pembatas dimana EV nya mempunyai koefisien positif. Variabel basis pada baris pembatas dengan rasio positif akan berubah status menjadi variabel non basis. Variabel ini kemudian disebut sebagai variabel yang meninggalkan basis atau *Leaving Variable* (LV). Lakukan operasi baris elementer untuk membuat koefisien EV pada baris dengan rasio positif terkecil ini menjadi berharga 1 dan 0 pada baris-baris lainnya. Kemudian kembali kelangkah 3.

Sedangkan algoritma simpleks untuk persoalan minimisasi, yaitu

1) mengubah fungsi tujuan dan persamaannya, kemudian menyelesaikannya sebagai persoalan maksimisasi.
2) memodifikasi langkah 3 sehingga seluruh variabel non basis pada baris 0 mempunyai koefisien yang berharga non positif (artinya berharga negatif atau nol), maka BFS sudah optimal. Jika pada baris 0 masih ada variabel dengan koefisein positif, pilihlah salah satu variabel yang paling positif pada baris 0 itu untuk menjadi EV.
3) untuk mengubah pembatas bentuk ≥ menjadi =, kita harus mengubah ruas kiri dengan variabel baru e_i untuk I = 1, 2, ..., n yang disebut *Excess Variable*.

Contoh.

BAB 4

Metode Simpleks 1

Metode M-Charnes

Untuk kasus dimana fungsi kendala ada tanda lebih dari atau lebih dari sama dengan ($>$ atau $\geq$) maka perlu menambahkan variable pengurang (surplus) dan variabel penambah (variabel slack) yang non-negatif. Akan menjadi sebuah persoalan bagaimana variabel slack tersebut dapat digunakan untuk membantu mencari penyelesaian masalah program linier. Salah satu caranya, diapaprkan oleh Charnes dengan menggunakan metode simplek agar variable slack menjadi nol, dengan menentukan nilai konstanta)-M) jika masalah yang dihadapi adalah memaksimumkan fungsi tujuan, dan menentukan nilai konstanta (M) pada variable slack jika masalah yang dihadapi meminimumkan.

Contoh.

1. Minimumkan : $Z = 3x + 2y$

Kendala :

$x + y \geq 2$

$2x + y \geq 3$

$x, y \geq 0$

Penyelesaian :

Masalah PL menjadi :

$Z = 3x + 2y + 0a + 0b$

Dengan kendala,

$x + y - a + c = 2$

$2x + y - b + d = 3$

Menggunakan prosedur memaksimalkan :

$\text{Min } Z = -Maks\ (-Z)$

Sehingga fungsi objektif menjadi : $Z^* = -3x - 2y + 0a + 0b - Mc - Md$

Maks

Tabel Awal :

Cj		-3	-2	0	0	-M	-M	HB	Rasio
VB	CB	x	y	a	B	c	D		
C	-M	1	1	-1	0	1	0	2	2
D	-M	2	1	0	-1	0	1	3	1,5
Zj-Cj		3	2	0	0	0	0	0	
		-3	-2	1	1	0	0	-5	

$\frac{1}{2}B2$ →

Keterangan :

Baris Zj-Cj baris pertama tidak mengandung unsur M sedangkan baris Zj-Cj baris kedua mengandung unsur M. Variabel masuk (variable pendatang) = x, variable keluar (variable perantau) = d

Tabel 2

Cj		-3	-2	0	0	-M	-M	HB	Rasio
VB	CB	x	Y	a	b	c	D		
C	-M	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
X	-3	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
Zj-Cj		0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	
		0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

Tabel 3

Cj		-3	-2	0	0	-M	-M	HB
VB	CB	X	Y	a	B	c	D	
Y	-2	0	1	-2	1	2	-1	1
X	-3	1	0	1	-1	-1	1	1

Zj-Cj	0	0	1	1	-1	-1	-5
	0	0	0	0	1	1	0

Dari baris Zj-Cj yang kedua sudah tidak ada yang negative maka iterasi selesai. Sehingga dapat disimpulkan : $x = 1, y = 1, a = 0, b = 0, c = 0, d = 0 \; dan \; Z = 5$

Metode Simpleks Fase 1

Langkah-langkah

1. Menambahkan variabel pada pertidaksamaan yang telah diketahui, jika pertidaksamaan tersebut telah memenuhi syarat simpleks yaitu $(\leq)$ berarti pertidaksamaan tersebut ditambahkan satu variable (variable slack), jika pertidaksamaan tersebut tidak memenuhi syarat simpleks atau $(\geq)$ berarti dikurangi variable surplus dan ditambah variable slack.
2. Fungsi Z ditambahkan variable dari persamaan yang tidak memenuhi syarat tersebut dengan symbol M yang berarti $M = 10^6$
3. Persamaan tersebut disusun fungsi Z diletakkan paling atas, lalu dari fungsi Z yang koefisiennya adalah M maka hasilnya harus nol
4. Setela dikalikan dan ditambahkan dengan fungsi Z, maka dicari nilai yang paling kecil dari hasilnya
5. Lalu dicari kunci dari persamaan yang diketahui dengan cara membagi gasil dengan persamaan dengan angka yang telah diberi tanda pada gasil yang paling kecil tersebut.
6. Dari kunci tersebut dibagi menjadi 1 (satu) dan angka yang berada satu kolom dengan angka 1 (satu tersebut dijadikan nol)
7. Lakukan hal tersebut berulang-ulang hingga tidak ada yang bernilai negative pada hasil yang berada paling bawah kecuali nilai Z.

Contoh soal

Minimumkan : $Z = 3x + 2y$

Kendala :

$x + y \leq 6$

$2x + 5y \geq 10$

$x, y \geq 0$

Penyelesaian :

Fungsi Objektif :

$Z = 3x + 2y \rightarrow -3x - 2y + 0a + 0b - Mc - Z = 0$

Dengan fungsi kendala menjadi,

$x + y \leq 6 \rightarrow x + y + a = 6$

$2x + 5y \geq 10 \rightarrow 2x + 5y - b + c = 10$

Tabel awal

Cj		-3	-2	0	0	-M	HB	Rasio
VB	CB	x	Y	a	B	c		
A	0	1	1	1	0	0	6	6
C	-M	2	5	0	-1	1	10	2
Zj-Cj		-3	-2	0	0	0	-5	
		-2M	-5M	0	M	0	-7M	

Cj		-3	-2	0	0	-M	HB
VB	CB	x	Y	a	b	c	
A	0	1	1	1	0	0	6
Y	-2	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2
Zj-Cj		-3	-2	0	0	0	-5
		-2M	-5M	0	M	0	-7M

Tabel 1

Cj		-3	-2	0	0	-M	HB
VB	CB	x	Y	a	b	c	
A	0	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	4
Y	-2	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	2
Zj-Cj		$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-4
		-	0	0	0	M	0

Karena pada baris objektif (B3) sudah

tidak ada yang negative maka iterasi selesai. Dari perhitungan di atas dapat diambil kesimpulan : $x = 0, y = 2, a = 4, b = 0, c = 0 \; dan \; Z = 4$

Soal latihan

1. Perusahaan furniture Pinewood memproduksi bangku dan meja dari dua sumber yaitu tenaga kerja dan kayu. Perusahaan mempunyai 80 jam untuk tenaga kerja dan 36 kg untuk kayu yang tersedia setiap hari. Permintaan maksimal untuk bangku adalah 6 unit tiap hari. Setiap pembuatan bangku tenaga kerja membutuhkan 8 jam dan 6 kg untuk kayu. Pendapatan dari setiap bangku adalah Rp. 400.000 dan untuk setiap meja adalah Rp. 100.000,00. Perusahaan memutuskan banyaknya bangku dan meja di produksi setiap hari sehingga mendapatkan keuntungan semaksimal mungkin. Buatlah model matematika untuk masalah ini dan selesaikan dengan menggunakan methode simplek 1!

   Penyelesaian

	X1 (Chairs)	X2 (Tables)	Batasan
Labor	8 jam	10 jam	80 jam
Wood	2 gram	6 gram	36 gram
Demand	1 Unit	-	6 Unit/Hari
Profit	400 per unit	100 per unit	

<u>Persamaan</u> :

Fungsi tujuan Z Max = 400x1 + 100X2

Constrain = 8x1 + 10X2 ≤ 80

= 2x1 + 6X2 ≤ 36

= x1 ≤ 6

<u>Persamaan Simplex :</u>

Fungsi Tujuan = Z – 400X1 – 100X2

Constrain = 8x1 + 10X2 + S1 = 80

= 2x1 + 6X2 + S2 = 36

= x1 + S3 = 6

Tabel Simplex

VB	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	Rasio
Z	-400	-100	0	0	0	0	0
S1	8	10	1	0	0	80	10
S2	2	6	0	1	0	36	18
S3	1	0	0	0	1	6	6

Iterasi 1

VB	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	Rasio
Z	0	-100	0	0	400	2400	-24
S1	0	10	1	0	-8	32	3,2
S2	0	6	0	1	-2	24	4
X1	1	0	0	0	1	6	0

Perhitungan Iterasi 1

Hitung Z	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	
	-400	-100	0	0	0	0	
ABBK x -400	-400	0	0	0	-400	-2400	-
Nilai Z Baru	0	-100	0	0	400	2400	

Hitung S1	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	
	8	10	1	0	0	80	
ABBK x 8	8	0	0	0	8	48	-
Nilai S1 Baru	0	10	1	0	-8	32	

Hitung S2	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	
	2	6	0	1	0	36	
ABBK x 2	2	0	0	0	2	12	-
Nilai S2 Baru	0	6	0	1	-2	24	

Iterasi 2

VB	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan
Z	0	0	10	0	320	2720
X2	0	1	0,1	0	-0,80	3,2
S2	0	5,83	-0,02	1	3	4,8
X1	1	0	0	0	1	6

Perhitungan Iterasi 2

Hitung Z	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	
	0	-100	0	0	400	2400	
ABBK x -100	0	-100	-10	0	80	-320	-
Nilai Z Baru	0	0	10	0	320	2720	

Hitung S2	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	
	0	6	0	1	-2	24	
ABBK x 6	0	0,17	0,02	0	-5	19,2	-
Nilai S2 Baru	0	5,83	-0,02	1	3	4,80	

Hitung X1	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	
	1	0	0	0	1	6	
ABBK x 0	0	0	0	0	0	0	-
Nilai X1 Baru	1	0	0	0	1	6	

Pada Iterasi 2, Tabel sudah optimal karena nilai fungsi tujuan Z pada X1 dan X2 = 0, maka Iterasi tidak dilanjutkan.

Solusi optimal :

X1 = 6

X2 = 3,2

Z = 2720

S1 dan S3 = 0 berarti kedua sumber daya ini habis terpakai (*scarce*)

S2 = 4,8 berarti sumber daya ini berlebihan (*abundant*)

Koefisien S1 pada baris fungsi tujuan tabel optimal adalah = 10, maka harga bayangan sumber daya pertama adalah 10.

Koefisien S2 pada baris fungsi tujuan tabel optimal adalah = 0, maka harga bayangan sumber daya kedua adalah 0.

Koefisien S3 pada baris fungsi tujuan tabel optimal adalah = 320, maka harga bayangan sumber daya ketiga adalah 320.

2. Fungsi tujuan Z Max = x1 + 5X2

   Kendala = $5x1 + 5X2 \leq 25$

   = $2x1 + 4X2 \leq 16$

   = $x1 \leq 8$

   Penyelesaian

<u>Persamaan Simplex :</u>

Fungsi Tujuan = Z –X1 – 5X2

Constrain = 5x1 + 5X2 + S1 = 25

= 2x1 + 4X2 + S2 = 16

= x1 + S3 = 8

Tabel Simplex

VB	X1	X2	S1	S2	S3	Nilai Kanan	Rasio
Z	-1,00	-5,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S1	5,00	5,00	1,00	0,00	0,00	25,00	5,00
S2	2,00	4,00	0,00	1,00	0,00	16,00	4,00
S3	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	8,00	0,00

Iterasi 1							
	Cj	1	5	0	0	0	
		X1	X2	S1	S2	S3	
0	S1	5	5	1	0	0	25
0	S2	2	4	0	1	0	16
0	S3	1	0	0	0	1	8
	Zj	0	0	0	0	0	0
Cj - Zj		1	5	0	0	0	
Iterasi 2							
0	S1	2,5	0	1	-1,25	0	5
5	X2	0,5	1	0	0,25	0	4
0	S3	1	0	0	0	1	8
	Zj	2,5	5	0	0	0	20
Cj - Zj		-1,5	0	0	0	0	

Solusi Optimal :

X1 = 0

X2 = 4

Z = 20

Dengan demikian, The Crumb and Custard Bakery akan menghasilkan keuntungan maksimal sebesar $20 apabila memproduksi Coffee Cakes (X1) sebesar 0 pcs dan Danish (X2) sebesar 4 pcs.

3. Minimumkan : $Z = 14x + 18y$

Kendala :

$x + y \leq 25$

$5x + 6y \geq 140$

$x, y \geq 0$

Soal latihan

1. Seorang tukang kue mempunyai 9 kg telur dan 15 kg terigu. Ia akan membuat 3 macam kue isi dengan ketentuan sebagai berikut :
   Kue isi nanas memerlukan 1 kg telur dan 3 kg terigu.
   Kue isi keju memerlukan 2 kg telur dan 2 kg terigu.

Kue isi coklat memerlukan 3 kg telur dan 2 kg terigu.

Harga dari ketiga macam kue isi tersebut adalah \$1 , \$9 dan \$1.

a. Berapa jumlah kue masingmasing yang harus diproduksi agar pendapatan dapat maksimal?

b. Jika banyaknya telur yang digunakan oleh tukang kue adalah $8\ kg \leq x \leq 20\ kg$. Tentukan berapa jumlah masing-masing kue diproduksi agar mendapatkan penghasilan yang maksimal?

2. Seorang tukang perabot mempunyai 6 unit kayu dan waktu luang 9 jam. Ia akan membuat 2 model tirai – tirai hiasan dgn ketentuan sbb :

   Model I perlu 2 unit kayu dan waktu 2 jam.

   Model II perlu 1 unit kayu dan waktu 3 jam.

   Harga dari kedua model itu adalah \$3 dan \$4. Berapa jumlah tirai dari tiap – tiap model yang harus di buat jika ia ingin memaksimumkan pendapatannya? Dapatkah anda menghitungnya dengan menggunakan metode lain selain metode simplek 1?

3. Perusahaan Bakso Jago memproduksi 2 jenis bakso yang berbeda yaitu bakso Kecil dan bakso Besar. Bahan baku utama kedua bakso itu sama, yaitu tepung sagu dan daging sapi. Bakso Kecil membutuhkan 9 gram tepung sagu dan 6 gram daging sapi untuk setiap baksonya. Sedangkan bakso Besar membutuhkan 10 gram tepung sagu dan 12 gram daging sapi untuk setiap baksonya. Diasumsikan permintaan konsumen sesuai dengan jumlah produksi. Tentukan jumlah bakso Kecil dan bakso Besar yang harus diproduksi untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal dengan menggunakan metode yang menurut kamu berbeda dari yang lain serta jelaskan alasannya mengapa menggunakan metode tersebut, bila : Harga jual bakso Kecil dalam (Rp) $800 \leq x \leq 1200$,- per-bakso

   Harga jual bakso Besar dalam (Rp) $1300 \leq x \leq 2500$,- per-bakso

   Tepung sagu yang tersedia (Kilogram) $10 \leq x \leq 15$

   Daging sapi yang tersedia (Kilogram) $6 \leq x \leq 10$

BAB 5

Metode Simpleks 2

Langkah-langkah metode simpleks 2 fase

1. System pertidaksamaan 1 dan seterusnya dibuat sama seperti simpleks dengan 1 fase
2. Nilai Z diminimumkan (dikalikan dengan negative)
3. Z pindah ruas menjadi positif
4. Selanjutnya sama seperti pada simpleks dengan 1 fase, namun pembedanya adalah yang mempunyai nilai hanya variable M dan Z. variable yang mengandung nilai M bernilai negative 1 dan Z adalah satu selebihnya bernilai nol.
5. Cari nilai pada system pertidaksamaan yang membentuk identitas dan pada posisi 1 disebelah kiri (pengali) diletakkan nilai x, lalu setelah 2 variabel dikali dan dijumlahkan, dikurang nilai x diatasnya.
6. Selanjutnya sama seperti pada simpleks 2 dengan 1 fase hingga berakhir pada nilai baris terakhir yang bernilai positif
7. Hilangkan kolom yang mengandung nilai M dan Z lalu letakkan nilai keseluruhan Z pada atas baris (nilai x)
8. Lalu seperti cara pada no 5 hingga nilai baris terakhir bernilai positif.
9. Dan itulah nilai Z (jangan lupa nilai Z adalah -Z)

Contoh soal

Minimumkan : $Z = 8x + 6y$

Kendala :

$4x + 2y \leq 60$

$2x + 4y \geq 48$

$x, y \geq 0$

Penyelesaian :

$4x + 2y \leq 60 \leftrightarrow 4x + 2y - x_3 + x_4 = 60$

$2x + 4y \geq 48 \leftrightarrow 2x + 4y - x_5 + x_6 = 48$

$Z = 8x + 6y \leftrightarrow Z - 8x - 6y - Mx_4 - Mx_6 = 0$

Tabel awal fase 1

Cj		0	0	0	-1	0	-1	HB	Rasio
VB	CB	x	Y	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	-1	4	2	-1	1	0	0	60	30
x_6	0	$\frac{1}{2}$	4	0	0	-1	1	48	12
Zj-Cj		-6	-6	1	0	1	0	-108	

$\frac{1}{4}B2$ $\longrightarrow$

Cj		0	0	0	-1	0	-1	HB
VB	CB	x	Y	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-1	4	2	-1	1	0	0	60
y	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	12
Zj-Cj		-6	-6	1	0	1	0	-108

Tabel 2

Cj		0	0	0	-1	0	-1	HB	r
VB	CB	x	Y	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	-1	3	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	36	12
y	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	12	24
Zj-Cj		-3	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-36	

$\frac{1}{3}B1$ $\longrightarrow$

Cj		0	0	0	-1	0	-1	HB
VB	CB	x	y	x_3	x_4	x_5	x_6	
x	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	12
y	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	12

$B2-\frac{1}{2}B1$ $\longrightarrow$

$B3+3B1$

Zj-Cj		-3	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-36

Tabel Akhir fase 1

Cj		0	0	0	-1	0	-1	HB
VB	CB	x	y	x_3	x_4	x_5	x_6	
x	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	12
y	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	6
Zj-Cj		0	0	0	1	0	1	0

Tabel Awal Fase 2

Cj		8	6	HB
VB	CB	x	y	
x	8	1	0	12
y	6	0	1	6
Zj-Cj		0	0	132

Karena sudah tidak ada yang negatif pada baris objektif maka iterasi selesai. Dapat disimpulkan :

$x = 12, y = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 \ dan \ Z = 132$

Soal latihan

Tentukan solusi setiap masalah berikut dengan menggunakan metode simpleks, serta berikan kesimpulannya!

1. Sebuah perusahaan industri mempunyai, berturut-turut 240kg, 360kg, dan 180kg bahan yaitu kayu, plastik, dan baja. Perusahaan itu akan membuat dua macam produk yaitu P dan Q yang berturut-turut memerlukan bahan-bahan (dalam kg) seperti data berikut :

Produk	Bahan yang diperlukan		
	Kayu	Plastik	Baja

P	1	3	2
Q	3	4	1

Keuntungan produk P ialah Rp. 40.000 dan tiap produk Q ialah Rp. 60.000

a. Rumuskan persoalan perusahaan ini dalam model matematika suatu program linier?

b. Gunakan analisis simpleks untuk memperoleh nilai maksimum fungsi tujuan?

c. Selain menggunakan analisis simpleks gunakan analisis lain untuk memperoleh nilai maksimum fungsi tujuan?

Selesaikan soal-soal program linier berikut dengan menggunakan metode simplek 2

2. Fungsi tujuan :

   Minimumkan : $Z = -3x_1 + x_2 + x_3$

   Kendala :

   $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$ dimana batas $1 \leq x_1 \leq 10$

   $-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$ dimana batas $2 \leq x_2 \leq 15$

   $2x_1 - x_3 = -1$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   Tentukan ada berapa nilai minimum fungsi tujuan yang anda dapatkan?

3. Fungsi tujuan :

   Maks : $Z = 25000x_1 + 50000x_2$

   Fungsi Batasan :

   $2x_1 + 4x_2 \leq 72$

   $2x_1 + 3x_2 = 48$

   $x_1, x_2 \geq 0$

Selain menggunakan metode simpleks 2, dapatkah anda menjawab dengan metode lain? Apakah sama hasilnya metode yang anda kerjakan dengan menggunakan metode simplek 2?

4. Fungsi tujuan

   Min $Z = 4x_1 + x_2$

   Fungsi Batasan :

   $3x_1 + x_2 = 3$

   $4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Adakah menurut kamu cara mendapatkan nilai minimum fungsi tujuan dengan cara yang berbeda dari metode yang kamu pelajari?

5. Fungsi tujuan :

Minimumkan $Z = 2x_1 + 5{,}5x_2$

Fungsi Batasan :

$x_1 + x_2 = 90$

$0{,}001x_1 + 0{,}002x_2 \leq 0{,}9$

$0{,}09x_1 + 0{,}6x_2 \geq 27$

$0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 \leq 4{,}5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Ada berapakah jawaban dalam mencari nilai minimum fungsi tujuan jika batas x_1 adalah $0{,}0003 \leq x_1 \leq 0{,}005$ dan $0{,}0001 \leq x_2 \leq 0{,}1$

BAB 6

Dual, Primal dan Kemerosotan

Pendahuluan

Biasanya setelah solusi optimal dari masalah program linier ditemukan maka peneliti cenderung untuk berhenti menganalisis model yang telah dibuat. Padahal sesungguhnya ddengan menganalisis lebih jauh atas solusi optimal akan dapat menghasilkan informasi lain yang berguna. Analisis yang dilakukan tersebut dikenal degan analisis **post-optimal.** Analisis ini dapat dilakukan dengan du acara yaitu analisis Dualitas dan Analisis Sensitivitas.

Secara sistematis, dualitas adalah alat bantu menyelesaikan masalah program linier, yang langsung didefinisikan dari persoalan aslinya atau model program linier primal. Dalam beberapa kasus program linier, dualitas sangat tergantung pada primal dalam hal tipe kendala, variable keputusan dan kondisi optimum.

Analisis dualitas dilakukan dengan merumuskan dan menginterpretasikan bentuk dual dari model. Bentuk dual adalah suatu bentuk alternative dari model program linier yang telah dibuat dan berisi informasi mengenai nilai-nilai sumber biasanya membentuk sebagai Batasan model. Setiap masalah program linier yang bertujuan mencari nilai maksimum selalu bertalian dengan suatu masalah program linier dengan tujuan mencari nilai minimu, yang disebut dengan dual masalah yang pertama. Sebaliknya setiap masalah program linier yang bertujuan mencari nilai minimum selalu maksimum yang disebut dual. Masalah pertama disebut primal sedangkan masalah kedua dengan tujuan berlawanan disebut dual.

Secara garis besar terdapat hubungan antara primal dan dual adalah sebagai berikut :

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan dual
2. Konstanta ruas kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan dual
3. Semua kolom primal menjadi kendala dual
4. Semua kendala primal mejadi variable keputusan dual
5. Koefisien kendala dari variable primal menjadi koefisien yang berkorespondensi dengan kendala dual

Kegunaan analisis dualitas bagi pengambilan keputusan adalah :

- Model primal akan menghasilkan solusi dalam bentuk jumlah laba yang diperoleh dari memproduksi barang atau biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi barang
- Model dual akan menghasilkan informasi mengenai nlai (harga) dari sumber-sumber yang membatasi tercapainya laba tersebut
- Solusi pada model dual memberikan informasi tentang sumber-sumber yang digunakan untuk menentukan apakah perlu menambah sumber-sumber daya, serta berapa biaya yang harus dikeluarkan untuk tambahan tersebut.

  Hubungan khusus antara primal dan dual adalah :

  1. Variable dual Y_1, Y_2, Y_3 berhubungan dengan Batasan model primal. Dimana untuk setiap Batasan dalam primal terdapat satu variable dual. Missal, dalam kasus di atas model primal mempunyai tiga Batasan, maka dualnya akan mempunyai 3 variabel keputusan.
  2. Nilai kuantitas pada sisi kanan pertidaksamaan pada model primal merupakan koefisien fungsi tujuan dual
  3. Koefisien Batasan model primal merupakan koefisien variable keputusan dual
  4. Koefisien fungsi tujuan primal, merupakan nilai kuantitas pada sisi kanan pertidaksamaan pada model dual
  5. Pada bentuk standar, model maksimisasi primal memiliki Batasan-batasan $\leq$, sedangkan model minimisasi dual memiliki Batasan-batasan $\geq$

Catatan :

- ✓ Untuk mentrasnformasi model primal kedalam bentuk dual adalah bahwa model primal harus dalam bentuk standar. Sehingga, bila model primal belum dalam bentuk standar harus diruubah dulu menjadi bentuk standar.
- ✓ Untuk masalah maksimisasi, bentuk standarnya adalah fungsi Batasan mempunyai tanda $\leq$
- ✓ Untuk masalah minimisasi, bentuk standarnya adalah fungsi Batasan mempunyai tanda $\geq$

Contoh Kasus :

Maksimum : $f = 3x + 5y + 4z$

Kendala : $2x - y + 3z \leq 6$

$x + 2y + 4z \leq 8$

$x, y, z \geq 0$

Primal

Maka dualnya menjadi :

Minimumkan: $g = 6u + 8v$

Kendala : $2u + v \geq 3$

$-u + 2v \geq 5$

$3u + 4v \geq 2$

$u, v \geq 0$

Dual

Agar lebih mudah dapat dibuat matriks sebagai berikut :

Matriks koefisien dari masalah primal yaitu $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 3 & * \end{bmatrix}$

Matriks koefisien dari masalah dual yaitu $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & * \end{bmatrix}$

Contoh soal :

Selesaikan dengan cara primal/dual

Minimumkan : $f = 3x + \frac{5}{2} y$

Kendala : $2x + 4y \geq 40$

$3x + 2y \geq 50$

$x, y \geq 0$

Penyelesaian :

Primal minimumkan : $f = 3x + \frac{5}{2} y$

Kendala : $2x + 4y \geq 40$

$3x + 2y \geq 50$

: $x, y \geq 0$

Matriks koefisien primal : $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 40 \\ 3 & 2 & 50 \\ 3 & \frac{5}{2} & * \end{bmatrix}$

Dual, matriks koefisien dualnya : $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & \frac{5}{2} \\ 40 & 50 & * \end{bmatrix}$

Masalah dualnya dapat ditulis sbb :

Maksimumkan : : $g = 40u + 50v$

Kendala :

: $2u + 3v \leq 3 \rightarrow 2u + 3v + a = 3$

: $4u + 2v \leq \frac{5}{2} \rightarrow 4u + 2v + b = \frac{5}{2}$

: $u, v \geq 0$

PL menjadi :

Tabel Awal VD

VD	Z	u	v	a	b	NB
Z	1	-40	-50	0	0	0
a	0	2	3	1	0	3
b	0	4	2	0	1	$\frac{5}{2}$

$\frac{1}{3}B2$ $\longrightarrow$

VD	Z	u	v	a	b	NK
Z	1	-40	-50	0	0	0
v	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1
b	0	4	2	0	1	5/2

$B1 + 50\ B2$

$B3 - 2B2$ $\longrightarrow$

Tabel 2

VD	Z	u	v	a	b	$
Z	1	$\frac{-20}{3}$	0	$\frac{50}{3}$	0	50
v	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1
b	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1	1/2

$\frac{3}{8}B3$

VD	Z	u	v	a	b	$
Z	1	$\frac{-20}{3}$	0	$\frac{50}{3}$	0	50
V	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1
U	0	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

$B1+\frac{20}{3}B3$

$B2-\frac{2}{3}B3$

Tabel Akhir

VD	Z	u	v	a	b	$
Z	1	0	0	$\frac{50}{3}$	0	$\frac{250}{4}$
v	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{8}$

b	0	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

Karena dari baris objektif (B1) sudah tidak ada yang negatif maka iterasi selesai.

Dari perhitungan di atas di dapat bahwa Z = $^{205}/_{4}$

Untuk memastikan kebenaran ini, akan dihitung juga masalah primalnya yaitu :

Minimumkan : $f = 3x + \frac{5}{2}y$

Kendala : $2x + 4y \geq 40$

$3x + 2y \geq 50$

$x, y \geq 0$

Penyelesaian :

$$2x + 4y - a + c = 40$$

$$3x + 2y - b + d = 50$$

$$f - 3x - \frac{5}{2}y + 0a + 0b - Mc - Md = 0$$

Tabel Awal Simpleks

Cj		0	0	0	0	-1	-1		
Variabel Basis	**C_B**	**x**	**y**	**a**	**b**	**c**	**d**	**Harga Basis**	**Rasio**
c	-1	2	**4**	-1	0	1	0	40	10
d	-1	3	2	0	-1	0	1	50	25
Zj - Cj		-5	-6	1	1	0	0	-90	

$\frac{1}{4}B1 \longrightarrow$

Cj		0	0	0	0	-1	-1	
Variabel	**C_B**	**x**	**y**	**a**	**b**	**c**	**d**	**Harga Basis**

Basis								
y	-1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	10
d	-1	3	2	0	-1	0	1	50
Zj - Cj		-5	-6	1	1	0	0	-90

Tabel 1

Cj		0	0	0	0	-1	-1		
Variabel Basis	C_B	**x**	**Y**	**a**	**b**	**c**	**d**	**Harga Basis**	**r**
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	10	20
d	-1	**2**	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	1	30	15
Zj - Cj		-2	0	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	-30	

Cj		0	0	0	0	-1	-1	
Variabel Basis	C_B	**X**	**y**	**a**	**b**	**c**	**d**	**Harga Basis**

$$B1 - \frac{1}{2}B2 \longrightarrow B3 + 2B2$$

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	5/2
x	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	15
Zj - Cj		0	0	0	0	1	1	0

Iterasi selesai karena baris objektif (Zj-Cj) sudah tidak ada yang negatif.

Dari data di atas di dapat : x = 15 dan y = 10 fungsi objektif untuk primal :

$$f = 3x + \frac{5}{2}y$$

$$f(15,10) = 3(15) + \frac{5}{2}(\frac{5}{2})$$

$$= 45 + \frac{25}{4} = \frac{205}{4}$$

Dari penyelesaian di atas mempunyai hasil yang sama : $\frac{205}{4}$

Soal Latihan

Maksimumkan : $w = 60y_1 + 80y_2$

Berdasarkan pembatas :

$2y_1 + 2y_2 \leq 16$

$3y_1 + 5y_2 \leq 30$

$2y_1 + 3y_2 \leq 36$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Jawab :

$2y_1 + 2y_2 + t_1 = 16$

$3y_1 + 5y_2 \qquad + t_2 = 30$

$$2y_1 + 3y_2 \qquad\qquad + t_3 = 36$$

Sedangkan fungsi objektifnya ditulis dalam bentuk

$$w - 60y_1 + 80y_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 = 0$$

Dengan demikian penyelesaian dari persoalan diatas adalah sebagai berikut :

Basis	y_1	y_1	t_1	t_2	t_3	solusi
t_1	2	2	1	0	0	16
t_2	3	5	0	1	0	30
t_3	2	3	0	0	1	36
w	-60	-80	0	0	0	0
t_1	4/5	0	1	-2/5	0	4
t_2	3/5	1	0	1/5	0	6
t_3	1/5	0	0	-3/5	1	18
w	-12	0	0	0	0	480
y_1	1	0	5/4	-1/2	0	5
y_2	0	1	-3/4	½	0	3
y_3	0	0	-1/4	-1/2	1	17
w	0	0	15	10	0	540

Karena pada diatas tidak terdapat lagi entri negative pada baris w, maka table ini merupakan table akhir dan fungsi objektif telah mencapai nilai optimal, yakni :

$w_{maks} = 540$ untuk $y_1 = 5\ unit$, $y_2 = 3\ unit$, dan $t_3 = 17\ unit$, yakni bahan yang tidak terpakai dari konstrain ketiga sedangkan $t_1 = t_2 = 0$

2. Sebuah garment PT. Bintang memproduksi dua jenis pakaian yaitu pakaian wanita dan pakaian pria. Tiap produksi 1 unit pakaian wanita memberikan keuntungan sebesar Rp 100.000,- dan tiap produksi 1 unit pakian pria memberikan keuntungan sebesar Rp. 80.000,-. Produksi pakaian pria dan wanita dihitung atas dasar harian. Tabel berikut memperlihatkan sumber-sumber daya yang terbatas beserta kebutuhan sumber-sumber berupa jumlah bahan kain, jumlah tenaga kerja dan luas gudang penyimpanan untuk memproduksi setiap unit pakaian wanita dan pria:

   Tabel 2

Sumber Daya	Kebutuhan sumber daya		Jumlah yang tersedia/hari
	wanita	pria	
Kain tenaga kerja Gudang penyimpanan	3 m 4 orang 12 m^2	3 m 2 orang 18 m^2	72 m 40 orang 240 m^2
keuntungan	Rp 100.000	Rp. 80.000	

Untuk mengetahui berapa banyak pakaian wanita dan pria yang harus diproduksi untuk memaksimalkan keuntungan, maka diformulasikan suatu model matematika sebagai berikut : Maks $Z = 100.000x + 80.000y$ keuntungan $3x + 3y \leq 72m$ bahan kain $4x + 2x \leq 40$orang tenaga kerja $12x + 18x \leq 240m2$ gudang penyimpanan

VB	100.000	80.000	0	0	0	RK
	x	y	S1	S2	S3	
0S1	0	0	1	-3/8	-1/8	27
100.000x	1	0	0	3/8	-1/24	5
80.000y	0	1	0	-1/4	1/12	10
Zi-Ci	0	0	0	17500	2500	1.300.000
z	100.000	80.000	0	17500	2500	

B. KEMEROSOTAN (degeneracy)

Pengertian Kemerosotan

Metode simpleks didasarkan pada beberapa aturan yang di proses dari sebuah program awal yang memenuhi syarat, yang diperbaiki dan diperbaiki kembali sehingga tercapai suatu penyelesaian optimal. Pemilihan terhadap kolom kunci/pivot ialah tugas simpleks, karena harus mengenai kolom yang memiliki nilai positif terbesar (kasus maks) atau nilai negative terbesar (kasus min) dalam baris penilaian /objektif dari table simpleks. Tetapi dalam memilih baris kunci dengan tujuan menganti salah satu vector basis, akan dihadapkan pada 2 kesulitan. :

1. Table program simpleks awal dapat sedemikian sehingga satu/ lebih variable dalam kolom kuantitas bernilai nol. Jika terjadi, maka nilai hasil pembagian yang menentukan minimum ialah nol. Maka proses penggantian tidak dapat dilaksanakan karena variable yang harus diganti sudah bernilai nol.
2. Nilai hasil pembagian yang tidak negative yang menentukan baris kunci mungkin sama untuk dua atau lebih variable yang sedang dalam basis. Jika ini terjadi makan akan terjalin ada keterikatan dalam pemilihan terhadap beris kunci. Penghapusan terhadap salah satu variable yang terikat akan mengakibatkan variable terikat lain akan susut menjadi nol. Ini berakibat satu/lebih vector basis akan memiliki nilai nol.

Kedua peristiwa tersebut menimbulkan gejala yang dikenal sebagai kemerosotan. Usaha terhadap menyelesaian PL yang mengalami kemerosotan dapat mengakibatkan salah satu peristiwa berikut :

1. Setelah berkali-kali iterasi akan diperoleh penyelesaian optimal, atau
2. Masalah akan menjadi siklus sehingga menghalangi tercapainya penyelesaian optimal Penyebab kemerosotan adalah jika pada kolom kuantitas terhadap nilai nol, dan jika hasil pembagian yang tidak negative yang menentukan baris kunci sama untuk dua variable atau lebih.

Tahukah anda mengapa masalah di atas disebut kemerosotan?

Penanggulangan kemerosotan (Charnes dan Cooper) :

1. Tentukan semua variabel terikat/baris variabel itu
2. Untuk setiap kolom dalam identitas (dimulai dari kolom paling kiri dalam identitas dengan memproses satu demi sat uke kanan), hitunglah perbandingan dengan membagi angka setiap baris terikat dengan bilangan kolom kunci yang ada di dalam baris tersebut.
3. Bandingkan hasil bagi ini, kolom demi kolom, diproses ke kanan. Untuk pertama kali perbandingan tidak sama, ikatan sudah putus.
4. Diantara baris yang terikat, baris dengan perbandingan aljabar lebih kecil di tunjuk sebagai baris kunci.
5. Jika nilai perbandingan dalam identitas tidak mematahkan ikatan, bentuklah perbandingan untuk kolom-kolom dari ‘badan utama’ dan pilihlah baris kunci seperti yang dijelaskan pada langkah 3 dan 4.

Soal Latihan

1. Maksimumkan Maksimumkan : $Z = 50x_1 + 40x_2$

   Dengan Kendala :

   $3x_1 + 5x_2 \leq 175$ waktu perakitan

   $x_2 \leq 20$ monitor portable

   $8x_1 + 5x_2 \leq 300$ kapasitas gedung

$x_1, x_2 \geq 0$ tak negative

Jawab

Table simpleks setelah iterasi pertama

Dasar	Ca	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	B
		50	40	0	0	0	
S_1	0	0	25/8	1	0	-3/8	125/2
S_2	0	0	1	0	1	0	20
x_1	50	1	5/8	0	0	1/8	75/2
zj		50	250/8	0	0	0	1875
cj-zj		0	70/8	0	0	0	

Entri dalam baris evaluasi bersih menunjukkan bahwa x_2 harus memasuki dasar itu. Maka kita hitung rasio yang tepat untuk menentukan baris pivot, diperoleh

$$\frac{\overline{b_1}}{\overline{a_{12}}} = \frac{125/2}{25/8} = 20$$

$$\frac{\overline{b_2}}{\overline{a_{22}}} = \frac{20}{1} = 20$$

$$\frac{\overline{b_3}}{\overline{a_{32}}} = \frac{75/2}{5/8} = 60$$

Hubungan antara baris pertama dan kedua. Ini merupakan indikasi bahwa kita akan memiliki suatu degenerasi penyelesaian layak dasar pada iterasi berikutnya.

Table simpleks setelah iterasi berikutnya

Dasar	Ca	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
		50	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	8/25	0	-3/25	20

S_2	0	0	0	-8/25	1	3/25	0
x_1	50	1	0	-5/25	0	5/25	25
Zj		50	40	70/25	0	130/25	2050
cj-zj		0	0	-70/25	0	-130/25	

2. Seseorang memerlukan 10,12, dan 12 unit bahan kimia A, B, dan C berturut-turut untuk halamannya. Pupuk berupa cairan mengandung 5, 2, dan 1 unit dari A, B dan C berturut-turut perbotolnya, dan pupuk berupa serbuk mengandung 1,2, dan 4 unit A, B, dan C berturut-turut perkotak karton. Harga pupuk cair Rp. 30.000 per botol dan serbuk Rp 20.000 per kotak. Beberapa pupuk dar masing-masing harus di beli agar biaya serendah mungkin tetapi masih memenuhi persyaratan ? (kerjakan dengan Dual)
3. Sebuah perusahaan mebel membuat lemari, meja dan kursi. Setiap produk mebel tersebut dibutuhkan bahan/ pekerjaan yaitu kayu, finishing dan pengecatan. Informasi dalam pembuatan mebel tersebut sebagai berikut :

Bahan/Pekerjaan	Lemari	Meja	Kursi	Ketersediaan waktu
Kayu	8 m^2	6 m^2	1 m^2	48 m^2
Finishing	4 jam	2 jam	1,5 jam	20 jam
Pengecatan	2 jam	1,5 jam	0,5 jam	8 jam
Harga Jual (Rp)	600	300	200	

Fomulasikan persoalan utama (primal problem) dan persoalan rangkap (dual problem) dari pemrograman linier di atas.